PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO W KATOWICACH NR 30

PRACE MATEMATYCZNE III, 1973

JAN CHABROWSKI

SUR UN SYSTÈME NON LINÉAIRE D'INÉGALITÉS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

Dans la note présente nous considérons les inégalités non linéaires du type parabolique dans des domaines non bornés et dans une classe de fonctions satisfaisant à une condition de la croissance à l'infini. Comme une conséquence nous obtenons des théorèmes sur l'unicité des solutions des problèmes aux limites pour un système d'équations non linéaires du type parabolique.

1. Introduisons d'abord des définitions et des notations (voir [2]). Soit E_{n+1} l'espace-temps à $n+1$ dimensions de points $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$. Soit B un ensemble ouvert et non borné de l'espace E_n des variables spatiales $(x_1, \ldots, x_n)$ et posons

$$D = (-\infty, +\infty) \times B, \quad D_{t_o} = (-\infty, t_o) \times B, \quad \Gamma = (-\infty, +\infty) \times \partial B \text{ et}$$
$${}_{o} = (-\infty, t_o) \times \partial B \cup (t = t_o) \times B,$$

où ∂B désigne la frontière de B.

DÉFINITION 1. *La fonction* $F^i(t, x, Z, Q, R)$, *où* $Z = (z_1, \ldots, z_m)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $R = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$, *définie pour* $(t, x) \in D$ $((t, x) \in D_{t_o})$, *Z, Q, R arbitraires, est dite elliptique par rapport à une suite de fonctions* $U(t, x) = \{u^j(t, x)\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ *de classe* C^1 *dans* D (D_{t_o}) *lorsque pour toute suite de nombres* $\bar{r}_{jk}$, r_{jk} $(j, k = 1, \ldots n)$, *où* $r_{jk} = r_{kj}$, $\bar{r}_{jk} = \bar{r}_{kj}$, *telle que la forme quadratique*

$$\sum_{j, k=1}^{n} (\bar{r}_{jk} - r_{jk}) \lambda_j \lambda_k$$

est non positive, on a l'inégalité

$$F^i(t, x, U(t, x), u^i_x(t, x), \bar{R}) \leqslant F^i(t, x, U(t, x), u^i_x(t, x), R),$$

où

$$u^i_x = (u^i_{x_1}, \ldots, u^i_{x_n}).$$

DÉFINITION 2. *Nous disons que la suite de fonctions $F^i(t, x, Z, Q, R)$ satisfait à la condition W, lorsque l'indice i étant fixé arbitrairement les relations*

$$z^j \leqslant \bar{z}^j \ (j = 1, \ldots, m;\ j \neq i),\ z^i = \bar{z}^i$$

impliquent l'inégalité

$$F^j(t, x, Z, Q, R) \leqslant F^i(t, x, \bar{Z}, Q, R).$$

DÉFINITION 3. *Nous disons que la fonction $F^i(t, x, Z, Q, R)$ satisfait à la condition L lorsqu'elle vérifie l'inégalité*

$$[F^i(t,x, Z, Q, R) - F^j(t, x, \bar{Z}, \bar{Q}, \bar{R})]\ sgn\,(z^i - \bar{z}^i) \leqslant L_1 A(r) \sum_{j,\,k=1}^{n} |r_{jk} - \bar{r}_{jk}| +$$

$$+ L_2 \sqrt{A(r)} \int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} \sum_{l=1}^{n} |q_l - \bar{q}_l| + L_3 \left[\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 \sum_{l \neq i} |z^l - \bar{z}^l| -$$

$$- L_4 \left[\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 |z^i - \bar{z}^i|,$$

où $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2$, L_1, L_2, L_3 et L_4 sont *des constantes positive et de plus L_3 et L_4 satisfont à l'inégalité*

$$(m-1)\, L_3 < L_4 \tag{1}$$

(Nous admettons que sgn 0 = 1). La fonction A (s) intervenant dans cette condition est définie pour $s \geqslant 1$, de classe C^1 et satisfait aux conditions

$$\text{(a)}\quad A(s) > 0 \quad pour \quad s \geqslant 1, \quad \text{(b)} \int_1^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} = \infty,$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{A(r)} \leqslant M_1 r \int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}, \quad \text{(d)} \quad \left|\frac{d}{dr} \sqrt{A(r)}\right| \leqslant M_2 \int_1^r \frac{sp}{\sqrt{A(s)}}$$

où M_1 et M_2 sont des constantes positives.

REMARQUE. *Vu que $r \geqslant \sqrt{2}$, on peut admettre que* $\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} \geqslant 1.$

DÉFINITION 4. *Une fonction f (t, x) est dite de classe $\bar{E}^{\alpha}_{A}$ dans l'ensemble D (D_{t_0}) lorsqu'il existe des constantes positives M et α telles que*

$$f(t, x) \leqslant M \exp \left\{ \alpha \left[\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + \alpha |t| \right\}$$

pour $(t, x) \in \bar{D}$ $((t, x) \in D_{t_0})$ *et*

$$4\alpha^2 n^2 L_1 n + \alpha\,(2 n^2 L_1 M_1 + 2 n^2 L_1 M_2 + 2 L_1 n^2 + 2 L_1 M_1 n + 2 L_2 n + 1) + (m-1)\, L_3 - L_4 \leqslant 0, \tag{2}$$

où L_1, L_2, L_3, L_4, M_1 et M_2 sont les constantes introduites dans la définition 3. Analogiquement, une fonction $f(t, x)$ satisfaisant à l'inégalité

$$f(t, x) \geqslant -M \exp\left|\alpha\left[\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + \alpha|t|\right|$$

et vérifiant (2) *appartient à la classe $\underline{E}_A^\alpha$.*

Posons

$$E_A = \underline{E}_A^\alpha \cap \overline{E}_A^\alpha.$$

2. Les définitions du paragraphe 1 étant adoptées, nous pouvons énoncer le théorème suivant

THÉORÈME 1. *Supposons que*

1° *Les fonctions $F^i(t, x, Z, Q, R)$ $(i = 1, \ldots, m)$ sont définies pour $(t, x) \in D$ $((t, x) \in D_{t_0})$ et Z, Q, R arbitraires et satisfont aux conditions W et L.*

2° *Les fonctions $u^i(t, x)$, $v^i(t, x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ sont continues dans la fermeture de D (D_{t_0}), de classe C^1 dans D (D_{t_0}) et possèdent des dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables $(x_1, \ldots, x_n)$ continues dans D (D_{t_0}) et de plus $u^i \in \overline{E}_A^\alpha$, $v^i \in \underline{E}_A^\alpha$.*

3° *Pour chanque indice i la fonction $F_i(t, x, Z, Q, R)$ est elliptique par rapport à la suite $\{u^j(t, x)\}$ $(j = 1, \ldots, m)$.*

4° *Les inégalités différentielles*

$$u_t^i(t, x) \leqslant F^i(t, x, U(t, x), u_x^i(t, x), u_{xx}^i(t, x)).$$
$$v_t^i(t, x) \geqslant F^i(t, x V(t, x), v_x^i(t, x), v_{xx}^i(t, x))$$

$(i = 1, \ldots, m)$ sont remplies dans tout point $(t, x) \in D$ $((t, x) \in D_{t_0})$.

5° $$u^i(t, x) \leqslant v^i(t, x) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

pour $(t, x) \in \Gamma$ $((t, x) \in \Gamma_{t_0})$.

Dans toutes ces hypothèses, les inégalités

$$u^i(t, x) \leqslant v^i(t, x) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

ont lieu dans D (D_{t_0}).

D é m o n s t r a t i o n. La démonstration est strictement analogue à celle du théorème 1 dans [1]. Nous introduisons une fonction auxiliaire des variables (t, x) et du paramèthe α_1 de la forme suivante

$$H(t, x) = \exp\left|\alpha_1\left[\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right| \cosh \alpha_1 t,$$

où α_1 satisfait à l'inégalité (2) et de plus $\alpha_1 > \alpha$

Posons

$$(4)\qquad F(H) = L_1 A(r) \sum_{i,j=1}^{n} |H_{x_i x_j}| + L_2 \sqrt{A(r)} \int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} \sum_{j=1}^{n} |H_{x_j}| +$$

$$+[(m-1)L_3 - L_4]\left[\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 H - H_t,$$

En appliquant les propriétés de la fonction $A(s)$ (définition 3) on peut vérifier par un calcul simple que la fonction $H(t, x)$ satisfait à l'inégalitè

$$F(H) \leqslant H(t, x)\left[\int_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 \{4\alpha_1^2 n^2 L_1 + \alpha_1 (2n^2 L_1 M_2 + 2L_1 n^2 +$$

$$+ 2n^2 L_1 M_1 + 2L_1 M_1 n + 2L_2 n + 1) + (m-1) L_3 - L_4\}.$$

Puisque α_1 satisfait à l'inégalité (2), donc nous avons

$$(5)\qquad F(H) \leqslant 0 \quad \text{pour } (t, x) \in D.$$

Introduisons encore les fonctions

$$(6)\qquad u^i = \bar{u}^i H \quad v^i = \bar{v}^i H.$$

Les inégalités (3) sont équivalentes aux inégalités

$$(7)\qquad \bar{u}^i \leqslant \bar{v}^i \quad \text{pour } (t, x) \in D.$$

Il suffit donc de démontrer (7). En vertu de l'inégalité $\alpha_1 > \alpha$, à $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $R > 0$ tel que pour $(t, x) \in D - K_R$ on ait

$$(8)\qquad \bar{u}^i(t, x) - \bar{v}^i(t, x) \leqslant \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, m),$$

où

$$K_R = \{(t, x);\ |x|^2 + t^2 \leqslant R^2\}.$$

Nous montrerons que l'inégalité (8) est remplie dans D. Dans le cas contraire il existerait u nindex j et un point $(t^*, x^*) \in K_R \cap D$ tel que

$$\varepsilon < \bar{u}^j(t^*, x^*) - \bar{v}^j(t^*, x^*) = \max_i \frac{\max}{K_R \cap D}\left[\bar{u}^i(t, x) - \bar{v}^i(t, x).\right]$$

D'après l'inégalité (8) et l'hypothèse 5°, (t^*, x^*) est un point intérieur de l'ensemble $K_R \cap D$, donc

$$(9)\qquad \bar{u}^j_t(t^*, x^*) - \bar{v}^j_t(t^*, x^*) = 0; \quad \bar{u}^j_{x_k}(t^*, x^*) - \bar{v}^j_{x_k}(t^*, x^*) = 0$$

$$(k = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{k,l=1}^{n}\left[\bar{u}^j_{x_k x_l}(t^*, x^*) - \bar{v}^j_{x_k x_l}(t^*, x^*)\right]\lambda_k \lambda_l \leqslant 0$$

pour tout vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Posons encore

$$Q^{\bar u} = \left\{ \bar u^j_{x_l}(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*) + \bar u^j(t^*, x^*)\, H_{x_l}(t^*, x^*) \right\}_{l=1}^{n},$$

$$Q^{v} = \left\{ \bar v^j_{x_l}(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*) + \bar v^j(t^*, x^*)\, H_{x_l}(t^*, x^*) \right\}_{l=1}^{n},$$

$$R^{\bar u} = \Big\{ \bar u^j_{x_k x_l}(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*) + \bar u^j_{x_l}(t^*, x^*)\, H_{x_k}(t^*, x^*) +$$

$$+ \bar u^j_{x_k}(t^*, x^*)\, H_{x_l}(t^* x^*) + \bar u^j(t^*, x^*)\, H_{x_l x_k}(t^*, x^*) \Big\}_{k,\, l=1}^{n},$$

$$R^{\bar v} = \Big\{ \bar v^j_{x_k x_l}(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*) + \bar v^j_{x_l}(t^*, x^*)\, H_{x_k}(t^*, x^*) +$$

$$+ \bar v^j_{x_k}(t^*, x^*)\, H_{x_l}(t^*, x^*) + \bar v^j(t^*, x^*)\, H_{x_l x_k}(t^*, x^*) \Big\}_{k,\, l=1}^{n},$$

$$R^{\overline{vu}} = \Big\{ \bar v^j_{x_k x_l}(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*) + \bar u^j_{x_l}(t^*, x^*)\, H_{x_k}(t^*, x^*) +$$

$$\bar u^j_{x_k}(t^*, x^*)\, H_{x_l}(t^*, x^*) + \bar u^j(t^*, x^*)\, H_{x_l x_k}(t^*, x^*) \Big\}_{l,\, k=1}^{n},$$

$W(t^*, x^*) = \{w^l(t^*, x^*)\}$ $(l=1, \dots, n)$, $w^l(t^*, x^*) = max\, (\bar u^l(t^*, x^*), \bar v^l)\, t^*, x))$.

D'après l'hypothèse 4° nous avons

$$(10) \quad [\bar u^j_t(t^*, x^*) - \bar u^j_t(t^*, x^*)]\, H(t^*, x^*) + [\bar u^j(t^*, x^*) - \bar v^j(t^*, x^*)]\, H_t(t^*, x^*) \leqslant$$

$$[F^j(t^*, x^*, U(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*), Q^{\bar u}, R^{\bar u}) - F^j(t^*, x^*, U(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*),$$

$$Q^u, R^{vu})] + [F^j(t^*, x^*, U(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*), Q^{\bar u}, R^{\overline{vu}}) -$$

$$- F^j(t^*, x^*, W(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*), Q^{\bar u}, R^{\overline{vu}})] + [F^j(t^*, x^*, W(t^*, x^*),$$

$$Q^u, R^{vu}) - F^j(t^*, x^*, V(t^*, x^*)\, H(t^*, x^*), Q^{\bar v}, R^{\bar v})].$$

Selon 3° la première diffèrence du second membre de cette inégalité est non positive, et en vertud el'hypothèse 1° (la condition W) la deuxième différence est aussi non positive. D'autre part nous avons

$$(11) \quad |\, w^l(t^*, x^*) - \bar v^l(t^*, x^*)\, | = w^l(t^*, x^*) - \bar v^l(t^*, x^*) \leqslant$$

$$max\, (0, \bar u^l(t^*, x^*) - \bar v^l(t^*, x^*)) \leqslant \bar u^j(t^*, x^*) - \bar v^j(t^*, x^*).$$

pour $l = 1, \dots, m$, donc en vertu de la condition L et de l'inégalité (11) nous pouvons écrire l'inégalité (10) sous la forme

$$[\, \bar u^j_t(t^*, x^*) - \bar v^j_t(t^*, x^*)\,]\, H(t^*, x^*) \leqslant F(H) < 0,$$

ce qui est impossible.

3. Considérons le système d'équations

$$(12) \quad u^i_t = F^i(t, x, U, u^i_x, u^i_{xx}) \quad (i = 1, \dots, m)$$

et une solution $\{u^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ du (12) définie dans l'ensemble $D(D_{t_0})$.

DÉFINITION 5. *La solution* $\{u^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ *sera dite solution parabolique regulière du système (12) lorsque chaque fonction* F^i *est elliptique par rapport à la suite* $\{u^i(t, x)\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ *et les fonctions* $u^i(t, x)$ *sont continues dans la fermeture de* $D(D_{t_0})$, *de classe* C^1 *dans* $D(D_t)$ *et possèdent des dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables* $(x_1, \ldots, x_n)$ *continues dans* $D(D_{t_0})$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Dans les hypothèses 1° et 3° du théorème 1 le problème aux limites*

$$u^i(t, x) = \varphi_i(t, x) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

pour $(t, x) \in \Gamma(\Gamma_{t_0})$, *où les fonctions* φ_i *sont données d'avance sur* $\Gamma(\Gamma_{t_0})$, *rélatif au système (12), admet dans* $D(D_{t_0})$ *au plus une solution parabolique regulière de classe* E_A.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Chabrowski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné*, Ann. Polon. Math. XXII (1969), p. 27—35.

[2] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

JAN CHABROWSKI

O PEWNYM UKŁADZIE NIERÓWNOŚCI NIELINIOWYCH RÓŻNICZKOWYCH O POCHODNYCH CZĄSTKOWYCH TYPU PARABOLICZNEGO

Streszczenie

Rozważa się układ nierówności różniczkowych typu parabolicznego (w sensie J. Szarskiego) postaci

$$u_t^i \leqslant F^i(t, \mathbf{x}, U, u_x^i, u_{xx}^i),$$

$$v_t^i \geqslant F^i(t, \mathbf{x}, V, v_x^i, v_{xx}^i) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

w obszarach nieograniczonych postaci $(-\infty, +\infty) \times B$ lub $(-\infty, t_0) \times B$ $(B \subset E_n)$. Jako wniosek otrzymuje się twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania pierwszeg problemu brzegowego dla układu postaci

$$u_t^i = F^i(t, \mathbf{x}, U, u_x^i, u_{xx}^i) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Oddano do Redakcji 21. 5. 1970 r.